////// studie / article //

GÖDELOVA VĚTA A RELACE LOGICKÉHO DŮSLEDKU

Abstrakt: *Kurt Gödel svým důkazem první věty o neúplnosti poskytl metodu odhalování pravdy specifických aritmetických výrazů za podmínky, že všechny axiomy dané formální teorie aritmetiky jsou pravdivé. Dále, výraz, jehož pravda je tímto způsobem odhalena, nemůže být dokázán v dotyčné teorii. Může se tedy zdát, že relace logického důsledku je širší než relace odvoditelnosti pomocí předem definovaného souboru pravidel. Cílem této studie je prozkoumat, za jakých předpokladů může být gödelovský výraz správně považován za logický důsledek axiomů dané teorie. V této studii se tvrdí, že tomu tak může být pouze tehdy, když všechny teorémy dané teorie jsou chápany jako výrazy stejného druhu (a pravdivé ve stejném smyslu) jako aritmetické výrazy a jako výrazy o dokazatelnosti v dané teorii, a pouze tehdy, pokud jazyk teorie obsahuje logické výrazy, jež umožňují zahrnout určité predikáty meta-jazyka do jazyka dané teorie.*

Klíčová slova: *neúplnost; Gödelova věta; axiomatická teorie; logika*

JAROSLAV ZOUHAR
Filosofická fakulta, Univerzita Karlova v Praze
Celetná 20, 116 42 Praha 2
email / jaroslav.zouhar@ff.cuni.cz

Gödel's Incompleteness Theorem and the Relation of Logical Consequence

Abstract: *In his proof of the first incompleteness theorem, Kurt Gödel provided a method of showing the truth of specific arithmetical statements on the condition that all the axioms of a certain formal theory of arithmetic are true. Furthermore, the statement whose truth is shown in this way cannot be proved in the theory in question. Thus it may seem that the relation of logical consequence is wider than the relation of derivability by a pre-defined set of rules. The aim of this paper is to explore under which assumptions the Gödelian statement can rightly be considered a logical consequence of the axioms of the theory in question. It is argued that this is the case only when the all the theorems of the theory in question are understood as statements of the same kind (and true in the same sense) as statements of arithmetic and statements about provability in the theory, and only if the language of the theory contains logical expressions allowing to include certain predicates of meta-language in the language of the theory.*

Keywords: *incompleteness; Gödel's theorem; axiomatic theory; logic*

Od doby, kdy brněnský rodák Kurt Gödel překvapil matematickou veřejnost důkazem neúplnosti axiomatických teorií aritmetiky přirozených čísel, má se všeobecně za to, že pravdivost matematického tvrzení je něco podstatně jiného než jeho dokazatelnost v některé axiomatické teorii. Gödel totiž ukázal, jak k libovolné bezesporné axiomatické teorii, jejíž jazyk obsahuje všechny výrazové prostředky jazyka aritmetiky, sestrojit takovou větu v jazyce aritmetiky, která není v dané teorii ani dokazatelná, ani vyvratitelná. A jsme-li připraveni tvrdit, že každá věta jazyka aritmetiky je buď pravdivá, nebo nepravdivá, můžeme z Gödelova výsledku soudit, že v žádné axiomatické teorii aritmetiky nejsou dokazatelné všechny pravdivé věty aritmetiky přirozených čísel.

Gödelův výsledek bývá někdy interpretován tak, že některé pravdivé matematické výroky nemůžeme dokázat, a tedy že lidské schopnosti odhalovat matematickou pravdu jsou podstatně omezené. Avšak závěr, k němuž dochází většina odborníků, je tento: z neúplnosti axiomatických teorií neplyne, že by schopnosti matematiků byly takto limitované. Matematické dokazování se totiž může podstatně lišit od práce v kterékoli axiomatické teorii. (A vyvstává tak mimo jiné otázka, co vůbec můžeme říci o matematické práci na základě zkoumání axiomatických teorií, jimiž se zabývá logika.)

Představa, že provádění matematických důkazů se podstatně liší od formálního odvozování teorémů v axiomatické teorii, kontrastovala v době zveřejnění Gödelova důkazu s výsledky prací Alfreda Whiteheada, Bertranda Russella, Davida Hilberta a dalších, jejichž úspěchy při axiomatizaci podstatné části tehdejší matematiky se zdály naznačovat opak. Nezdálo se být jasné, *které* postupy v matematických důkazech nelze chápat jako odvození v některé z axiomatických teorií, jež byly předloženy. Dnes se dokonce má za to, že téměř všechny (ne-li úplně všechny) dosud provedené matematické důkazy v oblasti aritmetiky přirozených čísel (a také např. algebry a matematické analýzy) lze chápat jako odvození v jediné axiomatické teorii, totiž v Zermelo-Fraenkelově teorii množin[1] s axiomem výběru (dále jen *ZFC*). A otázka, v čem se matematické dokazování podstatně liší od odvozování teorémů v axiomatické teorii, se stále nezdá být uspokojivě zodpovězena.

Tento článek vznikl s podporou grantu č. 401/09/H007 *Logické základy sémantiky* Grantové agentury ČR. Děkuji oběma recenzentům za cenné připomínky k dřívější verzi článku a Štěpánu Machovi za jazykovou korekturu.

[1] Zermelo-Fraenkelova teorie množin je popsána např. v knize: Antonín SOCHOR, *Metamatematika teorií množin*. Praha: Karolinum 2005, s. 17.

Mezi odborníky se často objevuje názor, že všechny pravdivé věty aritmetiky jsou *logickými důsledky* postulátů některé axiomatické teorie, přestože nejsou z těchto postulátů odvoditelné s pomocí prostředků, jež nabízí daná axiomatická teorie.[2] Schopnost matematiků dokazovat věty aritmetiky – schopnost přesahující možnosti axiomatických teorií – se tak může jevit jako schopnost vyvozovat z předložených axiomů logické důsledky. Neúplnost axiomatické teorie se přitom zdá být spojena s nedostatečností *logických* nástrojů, jež axiomatická teorie poskytuje. To lze říci také tak, že logický kalkul plně nevystihuje relaci logického důsledku. Z tohoto přesvědčení vycházel ve třicátých letech minulého století Alfred Tarski, když se pokoušel charakterizovat logický důsledek sémanticky. Výsledkem je dnes běžná definice logického vyplývání, v níž se využívá pojmu *Tarského interpretace*.

Hlavním cílem tohoto článku je prozkoumat úvahy vedoucí k závěru, že některé věty aritmetiky jsou logickými důsledky axiomů některé ze známých axiomatických teorií, aniž by byly v této teorii dokazatelné. Jde tedy o problém formální logiky. Dalším cílem článku je ujasnit, co skutečně víme o vztahu mezi prací v axiomatické teorii a prokazováním pravdivosti matematických tvrzení a o vztahu mezi axiomatickými teoriemi a jazykem matematiky. Těmto otázkám se budu věnovat zejména v posledních třech oddílech.

Gödelova věta o neúplnosti

Gödelův výsledek, na nějž se zaměříme, je znám jako první věta o neúplnosti či jako první Gödelova věta. Jedna z mnoha verzí první věty o neúplnosti je tato:[3]

> Ke každé bezesporné axiomatické teorii obsahující prvořádovou Peanovu aritmetiku existuje taková sentence γ v jazyce prvořádové aritmetiky, že ani sentence γ, ani sentence $\neg\gamma$ není dokazatelná v dané teorii.

[2] Toto rozlišení bude vyjasněno dále. Prozatím poznamenejme, že výraz ‘axiomatická teorie’ zde používáme v tomtéž významu, v jakém se častěji používá výraz ‘formální systém’ – totiž že za součást axiomatické teorie považujeme i logický kalkul.

[3] Srv. Kurt GÖDEL, „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I“, *Monatshelfe für Mathematik und Physik*, roč. 38, 1931, s. 187. Viz také: Vítězslav ŠVEJDAR, *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Praha: Academia 2002, s. 318, 327, 329.

Poznamenejme, že formule jsou řady znaků sloužící jako symbolické zápisy vět a do jazyka prvořádové aritmetiky patří formule sestávající z logických symbolů ‘∀’, ‘∃’, ‘¬’, ‘∧’, ‘∨’, ‘=’ (případně jiné, ekvivalentní sady logických symbolů), mimo-logických symbolů ‘0’, ‘s’, ‘+’ a ‘·’ (případně jiné, ekvivalentní sady aritmetických symbolů; symbol ‘s’ tu značí funkci následníka neboli zvyšování o 1), jmenných proměnných x_1, x_2 ... a interpunkčních znamének ‘(’ a ‘)’.[4] Sentence jsou formule určitého druhu (totiž formule neobsahující volné proměnné, přičemž volná proměnná odpovídá zájmenu, jehož denotát má být určen kontextem, v němž se formule vyskytuje). Formule má vystihovat *logickou formu* věty: má vyjadřovat obsah věty takovým způsobem, aby bylo možné na základě syntaktické struktury tohoto zápisu dostatečně snadno určit, které věty z ní lze logicky odvodit.

Axiomatická teorie je tvořena sadou formulí (axiomů) a sadou odvozovacích pravidel, jež určují, jakým způsobem lze odvozovat formule z jiných formulí (např. z axiomů), a to čistě na základě syntaktických vlastností zúčastněných formulí.[5] Množina axiomů je přitom taková, že existuje algoritmus, jehož pomocí lze o libovolně zvolené formuli z této množiny ověřit, že formule do této množiny patří – tedy že je axiomem dané teorie. Stanovením axiomů a odvozovacích pravidel je určena množina formulí, jež lze odvodit z axiomů dané teorie s pomocí jejích odvozovacích pravidel. Tyto formule se nazývají *dokazatelnými* v dané axiomatické teorii. O libovolné formuli ψ, pro níž platí, že formule ¬ψ je dokazatelná v dané axiomatické teorii, budu říkat, že je v této teorii *vyvratitelná*.

Bezespornými axiomatickými teoriemi se zde myslí takové, v nichž nelze dokázat žádné dvě formule φ a ψ, kde ψ je tvaru ‘¬φ’. *Prvořádová Peanova aritmetika* (*PA*) je jistá axiomatická teorie obsahující jen axiomy aritmetiky, jež jsou považovány za evidentně pravdivé, a některé axiomy a odvozovací pravidla prvořádové logiky.[6] To, že axiomatická teorie *obsahuje PA*, znamená, že teorie buď přímo obsahuje všechny axiomy a odvozovací pravidla *PA*, anebo jsou tu všechny axiomy *PA* dokazatelné a aplikace každého odvozovacího pravidla *PA* se dá nahradit aplikací několika pravidel dané teorie.

[4] *Ibid*., s. 137–139.
[5] Častěji se axiomatickou teorií myslí množina (mimo-logických) axiomů společně s množinou všech formulí jazyka, do nějž tyto axiomy patří. Tak je výhodné uvažovat v případě, že je pevně dáno, která odvozovací pravidla lze použít při odvozování z axiomů. Pro úvahy rozvíjené v tomto článku však bude výhodnější považovat axiomy a odvozovací pravidla logiky za součást axiomatické teorie. Srv. ŠVEJDAR, *Logika*, s. 28–30, 156–157, 160.
[6] *Ibid*., s. 275–276.

Sentenci γ, jejíž existenci tvrdí první Gödelova věta, budu nazývat *gödelovskou sentencí* příslušnou k dané axiomatické teorii. Gödelovskou sentenci příslušnou k nějaké axiomatické teorii T budu značit γ_T.

K výsledku o neúplnosti dospívá Gödel touto úvahou: Axiomatickou teorii můžeme považovat za matematickou strukturu a množinu formulí dokazatelných v dané teorii za množinu matematických objektů s určitými matematicky popsanými vlastnostmi.[7] Díky tomu můžeme některé axiomatické teorie považovat za *předmět sebe samých* a některé formule jazyka zkoumané teorie lze považovat za věty o dokazatelnosti v dané teorii. S využitím rafinovaného triku se navíc Gödelovi podařilo najít způsob, jak k libovolně zvolené axiomatické teorii T sestrojit takovou formuli jazyka aritmetiky, která „tvrdí“ svou vlastní nedokazatelnost v teorii T, – tedy takovou formuli, která je jakožto tvrzení o přirozených číslech pravdivá právě tehdy, když není dokazatelná v teorii T. Touto formulí je gödelovská sentence γ_T.

Podstatnou vlastností gödelovské sentence je ta, že formule je tvaru ‘$\forall x\ \varphi(x)$’, kde každá pravdivá formule $\varphi(\underline{n})$ je v dané teorii dokazatelná a každá nepravdivá formule $\varphi(\underline{n})$ je v této teorii vyvratitelná.[8] Z toho lze (při znalosti axiomů a odvozovacích pravidel *PA*) usoudit, že je-li formule γ_T v bezesporné teorii obsahující *PA* dokazatelná, pak je pravdivá. Na základě toho se dá již dojít k závěru, že je-li daná teorie obsahující *PA* bezesporná, pak v ní gödelovská formule není dokazatelná, a tedy je pravdivá.

Relace logického důsledku: Tarského analýza

Před rokem 1931 bylo ve formální logice zvykem uvažovat o relaci logického důsledku především jako o relaci *odvoditelnosti*. Za logické důsledky množiny axiomů byly považovány věty (či formule), jež bylo možno z těchto axiomů odvodit jen s využitím logiky.[9] Takto chápanou relaci logického

[7] Kurt GÖDEL, „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.“ *Monatshefte für Mathematik und Physik*, sv. 38, 1931, s. 174.

[8] Formulí φ(n) se zde myslí formule, která vznikne dosazením jména čísla n (tedy termu tvaru ‘ss...s0’, kde se symbol ‘s’ vyskytuje n-krát) za proměnnou x ve formuli φ(x). Zápis φ(x) značí, že formule φ obsahuje volnou proměnnou x a žádné jiné volné proměnné.

[9] Srv. Alfred TARSKI, „Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences.“ In: *Logic, Semantics, Metamathematics, Papers from 1923 to 1938*. Překl. J. H. Woodger. Claredon Press, Oxford, 1956, s. 63: “Let A be an arbitrary set of sentences of a particular discipline. With the help of certain operations, the so-called rules of inference, new sentences are derived from the set A, called the consequences of the set A. To establish these rules of inference, and with their help to define exactly the concept of consequence, is again a task of special metadisciplines.”

důsledku se zdálo být přirozené explikovat tak, že se popíše soubor odvozovacích pravidel, která lze při odvozování logických důsledků využít. Díky Gödelově důkazu *úplnosti* kalkulu pro prvořádovou logiku z roku 1929 se navíc zdálo, že takovouto explikaci lze provést vyčerpávajícím způsobem: že je možné popsat taková pravidla logiky, která umožní odvodit každý logický důsledek libovolné množiny vět (či formulí).[10]

Situace se však zcela změnila díky Gödelovým větám o neúplnosti. V článku z roku 1936 píše Alfred Tarski:

> Some years ago I gave a quite elementary example of a theory which shows the following peculiarity: among its theorems there occur such sentences as:
>
> A_0. 0 possesses the given property P,
>
> A_1. 1 possesses the given property P,
>
> and, in general, all particular sentences of the form
>
> A_n. n possesses the given property P,
>
> where 'n' stands for any symbol which denotes a natural number in a given (e. g., decimal) number system. On the other hand the universal sentence:
>
> A. Every natural number possesses the given property P,
>
> cannot be proved on the basis of the theory in question by means of the normal rules of inference. This fact seems to me to speak for itself. It shows that the formalized concept of consequence, as it is generally used by mathematical logicians, by no means coincides with the common concept. Yet intuitively it seems certain that the universal sentence A follows in the usual sense from the totality of particular sentences A_0, A_1, ..., A_n, ... Provided all these sentences are true, the sentence A must also be true.[11]

Z Tarského úvahy se zdá, že relace logického důsledku musí být bohatší než relace odvoditelnosti s pomocí běžných odvozovacích pravidel. Navíc se situace podstatně nezmění ani přidáním dalších odvozovacích pravidel. Tarski totiž vychází z první Gödelovy věty o neúplnosti, jež se vztahuje na *každou* bezespornou axiomatickou teorii obsahující *PA*. Z Gödelova důkazu

[10] Kurt GÖDEL, „Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls". *Monatshefte für Matematik*, sv. 37, 1930, s. 349–360.
[11] Alfred TARSKI, „On the Concept of Logical Consequence," s. 410–411.

plyne (jak lze usoudit z toho, co bylo řečeno výše), že ke každé takové teorii existuje sentence tvaru '$\forall x\ \varphi(x)$', o níž platí:

- Pro každé přirozené číslo n je v dané teorii dokazatelná formule $\varphi(\underline{n})$,
- Formule tvaru '$\forall x\ \varphi(x)$' není v dané teorii dokazatelná.

Jestliže vlastnost vyjádřenou formulí $\varphi(x)$ označíme P, pak formule $\varphi(\underline{0})$ vyjadřuje totéž tvrzení jako věta A_0, formule $\varphi(\underline{1})$ vyjadřuje totéž tvrzení jako věta A_1, atd.

Které tvrzení nyní vyjadřuje formule tvaru '$\forall x\ \varphi$'? Přímočaré čtení této formule by bylo:

B. Všechna x mají vlastnost P.

Tarski však mluví o větě

A. Všechna přirozená čísla mají vlastnost P,

jedině o níž se dá říci, že je důsledkem vět A_1, A_2, ... Formuli tvaru '$\forall x\ \varphi$' lze tedy považovat za důsledek všech formulí $\varphi(\underline{n})$ jen v případě, že za součást významu kvantifikátoru '$\forall$' nebo jmenných proměnných považujeme to, že do oboru kvantifikace patří jen přirozená čísla.

Jestliže má navíc věta A být *logickým* důsledkem vět A_1, A_2, ..., musí být *logicky* zaručeno, že každé přirozené číslo je označeno některým z výrazů $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, ... (tedy '0', 's0', 'ss0', ...). Jinak řečeno, výrazy aritmetiky je třeba považovat za *logické* výrazy. Avšak v případě, že by aritmetické symboly byly součástí jazyka logiky, byla by formule tvaru '$\forall x\ \varphi$' *logicky* platná („tautologická"), a proto by byla logickým důsledkem kterýchkoli formulí. Nebylo by pak potřeba zmiňovat se o větách A_1, A_2, ... Díky tomu se Tarského příklad může zdát poněkud zarážející.[12] Abychom věc vyjasnili, popišme podrobněji, co se rozumí relací logického důsledku.

Vztah logického důsledku lze chápat přinejmenším dvěma způsoby. Lze jej chápat jako

- vztah mezi větami (případně množinami vět a větami), nebo jako
- vztah mezi větnými formami (případně množinami větných forem a větnými formami), obsahujícími jen logické symboly, proměnné a interpunkční znaky.

[12] Viz např.: Jim EDWARDS, „Reduction and Tarski's Definition of Logical Consequence." *The Notre Dame Journal of Formal Logic*, roč. 44, 2002, č. 1, s. 49–51.

V prvním případě dospějeme k relaci logického důsledku tak, že případy důsledku rozdělíme na

- případy logického důsledku,
- případy jiného důsledku.

To je dnes běžné charakterizovat skrze to, *význam kterých výrazů* vyskytujících se v zúčastněných větách zajišťuje, že jedna věta je tu důsledkem jiných (přičemž to, které gramatické kategorie výraz je, se nepovažuje za otázku jeho významu). Tohoto rozlišení lze docílit tak, že se výrazy, z nichž jsou věty složeny, rozdělí na

- logické výrazy,
- mimo-logické výrazy.

Rafinovanější řešení, jak rozlišit mezi logickými důsledky a důsledky jiného druhu, je přiřadit větám logické formy (formule), které již neobsahují mimo-logické konstanty (tj. jiné než logické výrazy s pevně určeným významem). Zkoumání relace logického důsledku mezi větami (případně mezi množinami vět a větami) pak přechází na zkoumání vztahů mezi větnými formami (případně mezi množinami větných forem a větnými formami).

Přiřazení formulí větám je v podstatě rozpracováním předchozího postupu, kdy se výrazy daného jazyka rozliší na logické a mimo-logické: ve formuli je *ex definitione* rozlišeno, které výrazy jsou logické a které nikoli. Navíc je takto možné charakterizovat i nesložený výraz ve větě jako „částečně logický“: přisoudit mu určitý logický obsah, v němž ovšem nespočívá celý význam výrazu. Například větě

Existuje prvočíslo větší než 42

bychom mohli přiřadit logickou formu

$$\exists x\ (\mathrm{P}(x) \wedge x > 42),$$

ale také bychom mohli nahradit výraz

$$x > 42$$

výrazem

$$(\exists z\ x = 42+z) \wedge \neg(x = 42)$$

a větě přiřadit tuto logickou formu:

$$\exists x\,(\mathrm{P}(x) \wedge (\exists z\; x = 42{+}z) \wedge \neg(x = 42)).$$

V tom případě už se výrazem '*větší než*' nezachází ani jako s logickým výrazem (pokud znak '+' nepovažujeme za logický výraz), ani jako s výrazem čistě mimo-logickým, nýbrž přisuzuje se mu určitý logický obsah.

Vraťme se k Tarského příkladu. Zde se zdálo, jako by vztah logického vyplývání byl vztahem mezi větami. Avšak aby příklad dával dobrý smysl (je-li to možné), je potřeba počítat s nějakým určitým přiřazením větných forem zúčastněným větám, a to s jiným přiřazením, než které jsme popsali výše.

Jedna možnost, jež připadá v úvahu, je připisovat větám typu

Všechna přirozená čísla mají vlastnost P

logickou formu

$$\forall x\,(\nu(x) \rightarrow \varphi(x)),$$

kde formule $\varphi(x)$ vyjadřuje vlastnost P a formule $\nu(x)$ vyjadřuje vlastnost *být přirozeným číslem*. Aby navíc v Tarského příkladu šlo o *logické* vyplývání, musela by vlastnost *být přirozeným číslem* být popsána tak, aby bylo *logicky* zaručeno, že všechny předměty označené výrazy '0', 's0', 'ss0' atd. jsou přirozená čísla.

Jak zapsat, že každé přirozené číslo je označeno buď termem '0', nebo termem 's0', nebo termem 'ss0', atd., jen s pomocí logických výrazů? Chtělo by se využít nekonečnou disjunkci:

$$\forall x\,(x \textit{ je přirozené číslo} \rightarrow (x = 0 \vee x = \mathrm{s}0 \vee x = \mathrm{ss}0 \vee \ldots)),$$

ale tu bychom nikdy nenapsali.[13] K nejběžnějšímu řešení této obtíže můžeme dospět následující úvahou.

[13] Poznamenejme, že kdybychom pracovali s jazykem obsahujícím takovéto nekonečné formule, museli bychom tvrzení vyjádřená těmito formulemi vyjadřovat v nějakém metajazyce popisujícím tyto nekonečné formule. Jazyk, v němž bychom ona tvrzení ve skutečnosti vyjadřovali, by tedy byl jazyk popisující ony formule.

Abychom vyjádřili to, že každé přirozené číslo je některým z předmětů označených termy ‘0’, ‘s0’, ‘ss0’ ..., stačí popsat libovolnou vlastnost, kterou mají tyto předměty a žádné jiné, a říci, že všechna přirozená čísla mají tuto vlastnost. A když se nám žádnou takovou vlastnost nedaří přímo popsat, můžeme říci toto:

> *Všechna přirozená čísla mají všechny vlastnosti, jež mají předměty označené termy* ‘0’, ‘s0’, ‘ss0’ *atd., a nic jiného než přirozené číslo nemá všechny tyto vlastnosti*

a spoléhat se na to, že mezi vlastnostmi, o nichž se tu mluví, je i některá vlastnost, již mají právě všechny předměty označené termy ‘0’, ‘s0’, ‘ss0’ atd.[14] Vlastnost *být přirozeným číslem* lze pak vyjádřit druhořádovou formulí[15]

$$\forall V\ ((V(0) \wedge \forall y(V(y) \rightarrow V(\mathrm{s}y))) \rightarrow V(x)).$$

Jestliže tuto formuli označíme ‘$N(x)$’, můžeme Tarského větě *A* připisovat logickou formu ‘$\forall x\ (N(x) \rightarrow \varphi(x))$’.

Od axiomatické teorie, v jejímž jazyce se kvantifikace přes všechna přirozená čísla provádí takto, už nelze očekávat, že by splňovala výše uvedené předpoklady první Gödelovy věty. Například místo axiomu *PA*

$$\neg x\ \mathrm{s}x = 0$$

lze očekávat axiom

$$\neg\exists x\ (N(x) \wedge \mathrm{s}x = 0),$$

případně jiné axiomy, z nichž bude tato formule odvoditelná.[16] Taková axiomatická teorie pak nebude přímo obsahovat *PA*. Dá se ovšem snadno ukázat, že Gödelovu větu lze zobecnit i pro každou takovou axiomatickou teorii T, že formulím jazyka *PA* je možno přiřadit odpovídající formule jazyka teorie T tak, aby všechny formule přiřazené formulím dokazatelným

[14] Na této úvaze může čtenář oprávněně shledávat cosi podezřelého. K tomu se vrátíme později.
[15] O druhořádovou formuli jde proto, že se tu s pomocí výrazu ‘$\forall V$’ kvantifikuje přes vlastnosti.
[16] Poznamenejme, že otázku, které větě je přiřazena která formule, není třeba zodpovědět při popisu axiomatické teorie či jejího jazyka. Jestliže je však známo, jakým způsobem se věty aritmetiky zapisují s pomocí formulí jazyka dané teorie, dá se očekávat, že axiomy a odvozovací pravidla teorie tomu budou odpovídat.

v *PA* byly dokazatelné v teorii T a aby každým dvěma formulím φ a '¬φ' v jazyce *PA* byly přiřazeny takové formule, že z dvojice těchto formulí lze v teorii T odvodit některé formule ψ a '¬ψ'.

U výše uvedeného příkladu Tarski ve skutečnosti počítal s tím, že větám A, A_0, A_1 ... odpovídají formule predikátové logiky vyššího řádu.[17] Otázka, jestli druhořádová formule '$\forall x\ (N(x) \rightarrow \varphi(x))$' logicky vyplývá ze všech formulí $\varphi(\underline{n})$, je v podstatě tatáž jako otázka, jestli formule tvaru '$\forall x\ \varphi(x)$' logicky vyplývá ze všech formulí $\varphi(\underline{n})$ a druhořádového axiomu indukce. K této otázce se vrátím později. Prozatím lze říci toto: Tarského analýza vede k závěru, že relaci logického důsledku *pro logiky vyšších řádů* nelze vymezit s pomocí souboru axiomů a odvozovacích pravidel.

Poznamenejme, že předchozí úvahy vedly Tarského k sémantické definici logického důsledku, jež se dnes považuje za standardní způsob, jak tuto relaci vymezit:

> The sentence X follows logically from the sentences of the class K if and only if every model of the class K is also a model of the sentence X.[18]

Modelem sentence nebo množiny sentencí se přitom myslí taková interpretace *mimo-logických* symbolů vyskytujících se v těchto sentencích, při níž jsou ony sentence pravdivé.[19] Takto definovanou relaci logického důsledku je zvykem nazývat *logickým vyplýváním*. Logický kalkul (soubor axiomů a odvozovacích pravidel logiky) je dnes zvykem chápat jako nástroj, jak tuto relaci (alespoň částečně) popsat s pomocí jiných prostředků.

[17] Při studiu Tarského článku může být poněkud matoucí to, že Tarski se tu (v poznámce pod čarou) odkazuje k jinému článku, v němž věty podobné větám A, A0, A1 ... zapisuje s pomocí formulí logiky třetího řádu, v nichž se nevyskytují žádné mimo-logické výrazy. K analýze takového případu logického důsledku pak Tarského definice vyplývání (viz dále) nijak nepřispívá. Na jiném místě ovšem připisuje podobným větám formule druhořádové logiky, a v tom případě dává jeho analýza mnohem lepší smysl (srv. EDWARDS, „Reduction and Tarski's Definition of Logical Consequence," s. 55–57).

[18] TARSKI, „On the Concept of Logical Consequence," s. 417. Srv. též: ŠVEJDAR, *Logika*, s. 147–148.

[19] Dnes je zvykem definovat přesně, jakou podobu mohou může mít interpretace mimo-logických výrazů. Viz např. ŠVEJDAR, *Logika*, s. 140–143, 147. Stojí za povšimnutí, že za součást této interpretace se považuje i stanovení oboru kvantifikátorů. To není otázka naší volby: je to jediná možnost, jak umožnit rigorózně definovat pravdivost formulí při dané interpretaci. Viz též dále.

Vyplývá gödelovská formule z axiomů aritmetiky?

K závěru, že některé axiomatické teorie mají gödelovskou sentenci (příslušnou vždy k dané teorii) za svůj logický důsledek, lze dospět i jiným způsobem, než jakým k němu dospěl Tarski. Jedna úvaha vedoucí k takovému závěru je tato:

- *Nechť odvozovací pravidla axiomatické teorie T jsou logicky správná a do jazyka teorie T patří všechny formule prvořádové aritmetiky.*
- *Předpokládejme, že všechny axiomy teorie T (ať už jsou to kterékoli) jsou pravdivé. Gödel dokázal, že existuje sentence* γ_T *jazyka aritmetiky, která je ekvivalentní s tvrzením nedokazatelnosti jí samé v teorii T. Předpokládejme, že by formule* γ_T *byla dokazatelná v teorii T. Díky tomu, že všechny axiomy teorie T jsou pravdivé a z pravdivých axiomů není v teorii T možno odvodit nepravdivé tvrzení, byla by pravdivá i sentence* γ_T*. To by ale vzhledem k tomu, co* γ_T *tvrdí, znamenalo, že* γ_T *není dokazatelná v teorii T, což je v rozporu s předpokladem, že by* γ_T *byla dokazatelná v teorii T. Formule* γ_T *tedy není dokazatelná v teorii T, a tudíž je pravdivá.*
- *Ukázali jsme, že pravdivostí axiomů teorie T je zaručena pravdivost sentence* γ_T*, a tedy že formule* γ_T *vyplývá z axiomů teorie T.*

Zdá se, jako bychom ukázali, že z axiomů teorie *T* vyplývá formule, která není z těchto axiomů odvoditelná s pomocí logického kalkulu, a pokud jde o teorii s jazykem prvořádové logiky, nevyplývá z ní podle běžné definice logického vyplývání.

Je tu ale háček: v úvaze se podstatně využívá toho, co sentence γ_T tvrdí jakožto výrok aritmetiky. Předpokládá se, že γ_T je ekvivalentní s tvrzením nedokazatelnosti jí samé v teorii *T*. Jestliže však zkoumáme vztah logického vyplývání, je potřeba odhlížet od významu *mimo-logických* symbolů (viz výše). Předchozí úvahu proto sice můžeme pokládat za součást zdůvodnění toho, že sentence γ_T je jakožto tvrzení aritmetiky pravdivá, ale nikoli za zdůvodnění toho, že formule logicky vyplývá z axiomů teorie, o níž je tu řeč. Abychom prokázali, že γ_T *logicky* vyplývá z axiomů teorie, by bylo potřeba dokázat, že axiomy dané teorie nepřipouštějí takový význam mimo-logických výrazů ve formuli γ_T, při němž by formule měla jinou pravdivostní hodnotu než tvrzení její nedokazatelnosti v teorii *T*. Přitom za důsledek Gödelových vět se naopak považuje, že (alespoň v případě teorií s jazykem prvořádové logiky) platí:

> Jazyk teorie T je možné interpretovat v souladu s jejími axiomy takovým způsobem, že sentence γ_T není pravdivá, přestože není dokazatelná v teorii T.

Zdá se tedy, že o předchozí úvaze lze říci totéž co o úvaze Tarského: abychom případ důsledku, o nějž se tu jedná, mohli považovat za případ logického důsledku, museli bychom aritmetickým symbolům přisuzovat jistý logický obsah.

Je tu však pozoruhodná jedna věc: považuje se za nepochybné, že Kurt Gödel *dokázal* ekvivalenci mezi gödelovskou sentencí γ_T (jakožto tvrzením o přirozených číslech) a tvrzením její nedokazatelnosti v teorii, o níž se jedná. Kdybychom vyjádřili aritmetické znalosti, díky nimž tento důkaz shledáváme správným, s pomocí axiomů některé teorie, pak by axiomy této teorie musely *logicky* zaručovat, že formule γ_T je ekvivalentní s tvrzením nedokazatelnosti sebe samé v teorii *T*. Které axiomy jsou třeba k důkazu ekvivalence gödelovské formule s tvrzením její nedokazatelnosti v dané teorii?

Znalosti aritmetiky využívané v Gödelově důkazu

V Gödelově důkazu první věty o neúplnosti lze najít podstatnou část zdůvodnění toho, že gödelovská sentence je ekvivalentní s tvrzením nedokazatelnosti jí samé v teorii, o níž se jedná. Poznamenejme však, že v Gödelově důkazu se ekvivalence mezi gödelovskou sentencí a tvrzením její nedokazatelnosti netvrdí a k tomu, abychom Gödelův důkaz shledali správným, není potřeba tuto ekvivalenci rozpoznat. Gödelovým cílem tu není dokázat, že gödelovská sentence je pravdivá. Jde tu o to dokázat, že není v dané teorii ani dokazatelná, ani vyvratitelná. Obecněji lze říci, že o formulích zkoumané teorie se v Gödelově důkazu mluví jako o řadách znaků, avšak nikoli jako o tvrzeních: formulím není připisována pravdivost a nezkoumá se tu, které tvrzení která formule vyjadřuje.[20] Z Gödelova důkazu je však dostatečně jasné, že gödelovská sentence je jakožto tvrzení aritmetiky ekvivalentní s tvrzením nedokazatelnosti sebe sama ve zkoumané teorii.

Prozkoumáním Gödelova důkazu a toho, co v Gödelově důkazu k ověření ekvivalence mezi gödelovskou formulí a tvrzením její nedokazatelnosti

[20] Gödel například využívá toho, že rekurzívní relace jsou tzv. *zachytitelné* v teoriích obsahujících *PA*, ale nikoli, že jsou tu tzv. *vyjádřitelné*. Srv. např.: Peter SMITH, *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press 2007, s. 28–36, 106–117. Viz také GÖDEL, „Über formal unentscheidbare Sätze," s. 186.

v dané teorii chybí, se dá vypozorovat, že k důkazu ekvivalence stačí využít tyto znalosti o přirozených číslech:[21]

- znalosti zachycené v *PA*,
- možnost rekurzivně definovat aritmetické funkce,
- princip indukce pro vlastnosti popisované nejen s pomocí výrazů jazyka aritmetiky, ale také s pomocí výrazů popisujících formule jazyka dotyčné teorie a dokazatelnost v ní.[22]

K druhému bodu můžeme říci toto: s využitím základních znalostí o konečných posloupnostech přirozených čísel lze dokázat, že v jazyce *PA* lze vyjádřit každou rekurzívně definovanou funkci a o takto vyjádřených funkcích je toho v teorii *PA* dokazatelného dostatečně mnoho (přesněji řečeno, pro každou takovou funkci *f* a každé číslo *n* lze v *PA* dokázat sentenci vyjadřující tvrzení, že funkce *f* má v bodě *n* jednoznačně definovanou hodnotu).[23]

K tomu, aby v jazyce s formou predikátové logiky bylo možno vyjádřit potřebné axiomy *indukce*, stačí vhodně obohatit jazyk teorie *PA*. Například stačí dodat do jazyka termy sloužící k označení jednotlivých znaků daného jazyka, případně predikátové symboly pro popis elementárních gramatických kategorií, do nichž spadá nekonečné množství znaků (a které by proto nemuselo být možné v jazyce bez těchto predikátových symbolů definovat), dále jmenné proměnné k označení (konečných) řad znaků a predikátový symbol k vyjádření toho, že určitý znak se nachází na určitém místě v určité řadě znaků. Jedna možnost, jak to konkrétně provést, je přidat k jazyku teorie *PA*:

- další dva druhy jmenných proměnných, přičemž za obor proměnných 2. druhu se budou považovat konečné řady znaků nebo čísel a za obor proměnných 3. druhu se budou považovat jednotlivé znaky,

[21] Poznamenejme, že pro porozumění hlavním myšlenkám článku není potřeba rozumět následujícím částem zaměřeným na „technické“ problémy.
[22] Princip indukce lze vyjádřit takto: Jestliže má nějakou vlastnost číslo 0 a platí, že má-li ji blíže neurčené číslo *n*, má ji i číslo *n*+1, potom tuto vlastnost mají všechna přirozená čísla (viz též dále). Díky principu indukce aplikovatelnému na vlastnosti popsané s pomocí metajazykových výrazů je možné dokázat, že každému číslu s určitou aritmetickou vlast-ností (již Gödel nazývá sugestivně ‘ist ein *Beweis* für die *Formel y*’) odpovídá některý důkaz v dané teorii, a díky tomu pak vyjádřit v jazyce aritmetiky tvrzení o dokazatelnosti formulí v této teorii.
[23] Viz např.: ŠVEJDAR, *Logika*, s. 313–316, 331–332.

- všechny termy tvaru ‘*Znak z*’, kde *z* je libovolný znak právě popisovaného jazyka, přičemž (nesložený) term ‘*Znak z*’ bude považován za atomický a bude označovat znak *z*,
- jednomístné predikátové symboly ‘P_1’, ‘P_2’ a ‘P_3’, přičemž v každé elementární formuli tvaru ‘$P_i(t)$’ je term *t* třetího druhu a formule vyjadřuje tvrzení, že znak označený proměnnou *t* je proměnná *i*-tého druhu,
- trojmístný predikátový symbol ‘*N*’, přičemž v elementární formuli tvaru ‘$N(t_1, t_2, t_3)$’ je term t_1 prvního druhu (téhož druhu jako jmenné proměnné jazyka prvořádové aritmetiky), term t_2 druhého druhu a term t_3 prvního nebo třetího druhu a tato formule má význam: na t_1-tém místě řady označené proměnnou t_2 je znak nebo číslo označené proměnnou t_3.[24]

V právě popsaném jazyce je možno poměrně přímočaře vyjádřit všechny znalosti o přirozených číslech potřebné k tomu, abychom Gödelův důkaz rozpoznali jako správný. Tyto znalosti lze zachytit souborem axiomů tvořeným:

- matematickými axiomy teorie *PA*,
- axiomy tvaru

$$((\varphi(0) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{s}x))) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)),$$

kde φ je libovolná formule rozšířeného jazyka, předpokládáme-li znalosti logiky a některé základní znalosti o řadách znaků. Axiomatickou teorii s těmito axiomy označme ‘*M*’. Nově zavedené termy a predikátové symboly budeme dále nazývat *meta-jazykovými výrazy*.

Axiomy teorie *M* zachycují *aritmetické* znalosti potřebné k důkazu ekvivalence gödelovské sentence (příslušné k libovolně zvolené teorii se stejným jazykem, jako je jazyk teorie *M*, nebo chudším) s tvrzením nedokazatelnosti této sentence v dané teorii. V jazyce teorie *M* můžeme nyní, s využitím meta-jazykových výrazů, sestrojit formuli, jež přímočaře vyjadřuje větu, že gödelovská sentence příslušná k teorii *M* není v teorii *M* dokazatelná. Označme tuto formuli takto:

$$\neg Dok_M(\gamma_M).$$

[24] Poznamenejme, že v této větě jsme se dopustili logické chyby.

V případě, že význam všech logických a meta-jazykových výrazů jazyka teorie M považujeme za známý, můžeme z axiomů teorie M usoudit, že sentence γ_M je ekvivalentní s větou vyjádřenou formulí $\neg Dok_M(\gamma_M)$, a tedy také, že je pravdivá. Považujeme-li meta-jazykové výrazy jazyka teorie M za logické výrazy, můžeme tvrdit, že formule γ_M je logickým důsledkem axiomů teorie M.[25]

V případě, že bychom meta-jazykové výrazy jazyka teorie M považovali za *mimo-logické*, byla by situace velmi podobná jako v případě *PA*: axiomy teorie by nezaručovaly, že formule

$$\neg Dok_M(\gamma_M)$$

má význam tvrzení nedokazatelnosti gödelovské formule příslušné k dané teorii v ní samé.

Důkaz gödelovské sentence

Volbou jazyka, součástí jehož logického výraziva jsou meta-jazykové výrazy, lze docílit toho, že gödelovská sentence příslušná k některé axiomatické teorii s tímto jazykem bude logickým důsledkem axiomů dané teorie. Příkladem je teorie M. Tím, že za součást logického výraziva některé teorie zvolíme takové výrazy, ovšem nezodpovíme otázku: čím je dáno, že odpovídající výrazy našeho jazyka mají tento význam? V čem spočívá například to, že určitý výraz *označuje* určitou formuli, nebo to, že určitá formule vyjadřuje vlastnost *být dokazatelná v této axiomatické teorii*?

Jedna možnost, jak vyjasnit, v čem spočívá význam některých výrazů, je prozkoumat, jakou roli hrají věty obsahující tyto výrazy *v důkazech*. Zaměříme se proto na to, jak lze s využitím výrazů vyjadřujících vlastnosti formulí dokázat pravdivost gödelovské sentence příslušné k některé axiomatické teorii T, z předpokladu, že všechny axiomy teorie T jsou pravdivé

[25] Jestliže logické výrazivo chápeme jako nástroj k vyjadřování vět o odvoditelnosti, případně o vztazích mezi pravdivostními hodnotami výroků, zdá se, že je dobrý důvod považovat tyto výrazy za logické. Srv. Jaroslav PEREGRIN, „What is the Logic of Inference?“ *Studia Logica*, roč. 88, 2008, č. 2, s. 268–271.

a její odvozovací pravidla zachovávají pravdivost.[26] Důkaz můžeme částečně symbolicky zapsat takto:[27]

1. ∀*ř* (*ř* je axiom teorie $T \rightarrow$ *ř* je pravdivá) (předpoklad)
2. ∀*ř* (*ř* je dokazatelná v $T \rightarrow$ *ř* je pravdivá) (indukcí z 1.)
3. γ_T je dokazatelná v $T \rightarrow \gamma_T$ je pravdivá (logický důsledek 2.)
4. γ_T je pravdivá $\rightarrow \gamma_T$ není dokazatelná v T (díky tomu, že γ_T je gödelovská sentence)
5. γ_T není dokazatelná v T (logický důsledek 3. a 4.)
6. γ_T je pravdivá (díky tomu, že γ_T je gödelovská sentence)

Takto tedy lze zdůvodnit pravdivost gödelovské sentence pro libovolnou teorii, jejíž axiomy shledáváme pravdivými.[28] Tím jsme ale neodvodili gödelovskou sentenci v tom smyslu, v jakém se mluví o dokazatelnosti v axiomatické teorii: odvodili jsme větu, že sentence γ_T je pravdivá; avšak důkazem v axiomatické teorii se myslí buď provedení kroků, jež vedou přímo k vypsání dané sentence, anebo řada formulí, jejímž posledním členem je dokázaná sentence. Abychom tedy dosáhli výsledku, jenž se očekává od axiomatické teorie, musíme vzít v potaz, o kterou axiomatickou teorii se přesně jedná, sestrojit konkrétní formuli γ_T a tuto formuli zapsat. A až v tu chvíli by se projevilo, že výraz ‘γ_T’ *označuje* formuli γ_T.

Z předchozího pozorování se zdá, jako by naše schopnost dokázat gödelovskou sentenci příslušnou k libovolné teorii, jejíž axiomy a odvozovací pravidla shledáváme správnými, spočívala v tom, že od tvrzení vyjádřeného některou formulí φ umíme přejít k větě

φ je pravdivá

[26] Přitom opomíjíme, že ne všechny odvozované formule jsou sentencemi. Při podrobném důkazu by bylo třeba vyjasnit, co se myslí pravdivostí formule, která není sentencí, tj. for-mule obsahující volné proměnné.

[27] Jiná možnost by byla usoudit na základě věty 2., že daná teorie T je bezesporná, z čehož pak lze podobným postupem jako v 3.–6. dospět k tomu, že sentence γ_T je pravdivá.

[28] Předpokladem Gödelovy první věty o neúplnosti je, aby daná axiomatická teorie byla bezesporná, nikoli aby formule dokazatelné v dané teorii byly pravdivé (přičemž první podmínka je slabší, neboť v bezesporné teorii mohou být dokazatelné i nepravdivé sentence). Z hlediska úvah o relaci logického důsledku či o axiomatizovatelnosti matematiky jsou však podstatné ty případy, kdy sentence dokazatelné v dané teorii jsou považovány za pravdivé, a to díky tomu, že není znám jiný způsob, jak obecně ověřovat bezespornost teorií, než s využitím toho, se sentence dokazatelné v dané teorii jsou pravdivé.

a od věty

γ_T je pravdivá

přejít k tvrzení vyjádřenému sentencí γ_T.[29] Mohla by nás napadnout otázka: Co kdybychom se k některé axiomatické teorii pokusili přidat axiomy nebo odvozovací pravidla umožňující provádět takové postupy?

Meta-jazyk a hranice explikovatelnosti

Pokusíme se obohatit jazyk axiomatické teorie *M* o predikátový symbol ‘*Pr*’, jenž bude sloužit k připisování pravdivosti formulím jazyka teorie *M*, a dodat axiomy či odvozovací pravidla umožňující odvodit z formule tvaru ‘$Pr(t)$’ formuli označenou termem *t*.[30] Kdyby se to podařilo, snad bychom mohli říci, že význam predikátového symbolu ‘*Pr*’ i význam meta-jazykových výrazů jazyka teorie *M* je dostatečně jasně určen axiomy a odvozovacími pravidly teorie, která takto vznikne.

Jako přirozené axiomy, jež by plnily tento účel, se mohou zdát formule tvaru

$$(Pr(t) \leftrightarrow \varphi),$$

kde φ je formule označená termem *t*.[31] Mohli bychom mít tendenci prohlásit, že těmito axiomy je definován význam symbolu ‘*Pr*’ a snad i význam (ostatních) meta-jazykových výrazů. Nejde tu však o axiomatickou definici v pravém slova smyslu: axiomů je tu nekonečně mnoho, a proto je nelze vyslovit v jazyce dané axiomatické teorie. Byly jen popsány v jiném jazyce.

[29] Zarážející navíc je, že se zdá, jako by tato schopnost podstatně obohacovala naše znalosti *aritmetiky*.

[30] Přitom opomíjíme to, že jazyk teorie *M* neumožňuje vytvářet termy označující formule: jsou tu jen výrazy vyjadřující vlastnosti typu *být formulí φ*. Proto by bylo přesnější místo o formuli tvaru ‘$Pr(t)$’ mluvit o formuli tvaru ‘$\forall x\ (\psi(x) \rightarrow Pr(x))$’, kde $\psi(x)$ vyjadřuje vlastnost *být formulí φ*. Tento rozdíl však z hlediska dalších úvah není podstatný.

[31] Díky výsledkům o nedefinovatelnosti predikátu pravdivosti (jež přímočaře plynou z práce Kurta Gödela a jež poprvé publikoval Alfred Tarski) se může zdát očividné, že axiomatická teorie obsahující tyto axiomy bude sporná. Připadá však v úvahu, že bychom některé formule obsahující predikát ‘*Pr*’ nepovažovali za gramaticky správně utvořené výrazy a tím vyloučili formuli tvrdící nepravdivost sebe samé.

Kdybychom formule jazyka této teorie považovali za věty našeho jazyka, mohli bychom vyjádřit předchozí axiomy větou:

> *Pro každý term t platí, že věta tvaru 'Pr(t)' je pravdivá právě tehdy, když je pravdivá věta označená termem t.*

Přitom už ovšem využíváme predikát *pravdivosti* a výrazy označující jazykové výrazy. Význam predikátového symbolu '*Pr*' jsme tedy axiomaticky nepopsali: to, co hraje formálně úlohu axiomů – totiž výroky tvaru '$(Pr(t) \leftrightarrow \varphi)$' – je ve skutečnosti odvozováno z tvrzení vyjádřeného v (meta-)jazyce, v němž se již význam výrazu '*je pravdivá*' a výrazů označujících jazykové výrazy považuje za určený. Z toho se zdá, že schéma

$$(Pr(t) \leftrightarrow \varphi)$$

je rozumnější považovat za součást *odvozovacího pravidla* než za nástroj k popisu *axiomů*[32] – totiž pravidla:

> *Jestliže term t označuje formuli φ, potom z libovolných předpokladů lze odvodit formuli tvaru '(Pr(t) ↔ φ)'.*

Označme toto odvozovací pravidlo '*P*'. K popisu pravidla *P* přitom není třeba využít predikát pravdivosti (tedy ne v jazyce, v němž pravidlo popisujeme), ale je třeba využít predikát *odvoditelnosti* a predikát *označování*, jejž lze definovat s využitím výrazů označujících výrazy formálního jazyka. Přitom význam predikátu *odvoditelnosti* se zdá být s významem predikátu *pravdivosti* úzce spojen: jestliže některá věta byla odvozena z vět, jimž je připisována pravdivost, lze ji prohlásit za pravdivou.

Určuje pravidlo *P* význam meta-jazykových výrazů (včetně predikátového symbolu '*Pr*') daného symbolického jazyka? Zdá se, že z velké části ano. Pravidlo ale nestačí k provedení důkazu gödelovské sentence naznačeného výše v bodech 1.–6.: s jeho pomocí (a s pomocí standardního kalkulu predi-

[32] Poznamenejme, že totéž lze říci o „axiomech" výrokové nebo predikátové logiky, jichž je také nekonečně mnoho. V případě některých axiomů logiky by bylo možné nahradit nekonečno formulí jediným axiomem, pokud bychom jazyk logiky rozšířili o kvantifikaci přes věty. Například schéma '$(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi))$' by tak mohlo být nahrazeno axiomem '$\forall p \forall q\ (p\rightarrow(q\rightarrow p))$'. Při axiomatizaci výrokové nebo predikátové logiky se ovšem nelze zcela obejít bez odvozovacích pravidel a zdá se být rozumnější chápat logický kalkul jako soubor odvozovacích pravidel, než jako soubor dvou druhů entit: axiomů (tvrzení symbolického jazyka) a pravidel (vět meta-jazyka).

kátové logiky) nelze dospět k bodu 2., tj. odvodit formuli vyjadřující tvrzení, že všechny formule dokazatelné v dané axiomatické teorii jsou pravdivé.[33] Pravidlo *P* například neumožňuje dokázat formuli vyjadřující tvrzení:

> *Pro všechny formule φ a ψ platí: jestliže je pravdivá formule φ i formule tvaru '(φ → ψ)', potom je pravdivá formule ψ.*

Jiná možnost, jak axiomaticky definovat predikát *pravdivosti* (a ostatní meta-jazykové predikáty a jména), by mohla být definovat je induktivně po vzoru Tarského.[34] Postup, jejž lze využít v případě rekurzivně definovaných aritmetických funkcí (o němž jsme se jen letmo zmínili výše), zde ovšem selhává. Při zápisu rekurzívně definovaných funkcí v jazyce teorie *PA* je totiž podstatné, že hodnota funkce v určitém bodě vždy závisí jen na konečně mnoha hodnotách této funkce v jiných bodech. Při induktivní definici predikátu pravdivosti je však třeba uvažovat o pravdivostních hodnotách formulí obsahujících volné proměnné, a tedy o pravdivostních hodnotách formulí při různých *ohodnoceních* (stanoveních denotátu) volných proměnných, přičemž těchto ohodnocení je nekonečně mnoho. Pravdivostní hodnota formule tvaru '∀*x* φ' nebo '∃*x* φ' je pak při nějakém daném ohodnocení proměnných (u teorie obsahující aritmetiku) určována nekonečně mnoha pravdivostními hodnotami – totiž pravdivostními hodnotami formule φ při nekonečně mnoha ohodnoceních. Z toho důvodu selhávají pokusy definovat predikát pravdivosti pro jazyk *PA* v jejím vlastním jazyce.[35] Podobný případ nastává u teorie *ZFC*, kde soubor všech ohodnocení lišících se v hodnotě jediné proměnné není množina, nýbrž vlastní třída.[36] Překážku můžeme obecně vidět v tom, že *obor hodnot* proměnné nelze považovat za *prvek* tohoto oboru: celek nemůže být obsažen v sobě samém. Narážíme tu na stejnou překážku, na niž narazil Gottlob Frege při pokusu redukovat aritmetiku na logiku a na niž narazil Georg Cantor při budování základů teorie množin.[37]

[33] To ovšem platí jen v případě, že nepřipustíme takové formule obsahující predikát '*Pr*', aby výsledná teorie byla sporná a bylo v ní proto s pomocí standardního kalkulu dokazatelné cokoli.
[34] Viz např.: ŠVEJDAR, *Logika*, s. 142–3.
[35] Viz např.: ŠVEJDAR, *Logika*, s. 338–342.
[36] Viz SOCHOR, *Metamatematika teorií množin*, s. 39–47.
[37] Viz např.: Graham PRIEST, *Beyond the Limits of Thought*. New York: Oxford University Press 2002, s. 128–129.

Nic nebrání tomu obohatit jazyk teorie *M* tak, aby tu byla vyslovitelná přímo Tarského definice pravdivosti (či splňování), a dodat axiomy, jež by zaručovaly existenci takto definovaného predikátu pravdivosti. Neměli bychom ovšem dobrý důvod považovat tyto axiomy za pravdivé: tvrdily by existenci predikátu definovaného takovým způsobem, že to, zda tento predikát náleží některé formuli, by bylo podle definice určováno zase tím, kterým formulím tento predikát náleží a kterým nikoli. Nebylo by proto možné bez podrobnějšího prozkoumání rozumně očekávat, že by pro každou formuli definice jednoznačně určovala, zda jí tento predikát náleží, či nikoli. A ukazuje se, že v jazyce obsahujícím výrazové prostředky potřebné k vyslovení Tarského definice lze zároveň sestrojit sentenci tvrdící nepravdivost sebe samé a teorie je díky tomu sporná.

Zdá se, jako by snaha definovat predikát pravdivosti vedla vždy k výsledku jednoho ze dvou druhů: buď umožníme dospět ke sporu, anebo se vymezení, k němuž jsme dospěli, bude jevit jako neúplné z toho důvodu, že přijetí tohoto vymezení nám dá důvod považovat další aplikaci predikátu pravdivosti za správnou.[38] Lze si ovšem představit, že o některé bezesporné definici predikátu pravdivosti (aplikovatelného na určité věty) nebudeme schopní předem říci, zda umožňuje dospět ke sporu či nikoli. Příčinou toho, že význam predikátu pravdivosti (a společně s ním i význam ostatních meta-jazykových výrazů) se nedaří vymezit s pomocí axiomů a odvozovacích pravidel bezesporné teorie, by mohlo být prostě to, že nevíme, co přesně by takové vymezení mělo splňovat: která použití meta-jazykových výrazů lze považovat za bezpečná, chceme-li se vyhnout sporu.

Můžeme ale považovat takový predikát za součást jazyka matematiky – za nástroj k vedení matematických *důkazů*? Důvod myslet si, že ano, je ten, že v *některých* případech si můžeme být jisti, že použití predikátu pravdivosti je bezpečné – například aplikujeme-li jej jen na věty aritmetiky a nikoli na věty o pravdivosti. S využitím aplikace predikátu jen na věty aritmetiky bychom ovšem nemohli dokázat gödelovskou sentenci příslušnou k axiomatické teorii, jež by popisovala *tuto* aplikaci: k důkazu gödelovské sentence příslušné k takové axiomatické teorii by bylo třeba aplikovat predikát pravdivosti i na věty o pravdivosti vět aritmetiky. Mohli bychom se pokusit popisovat postupně další a další přípustná použití predikátu pravdivosti, přičemž snaha popsat takto co nejvíce přípustných použití by přešla v úsilí o popisování

[38] Totéž lze říci o pokusech vymezit pojem množiny. Srv. PRIEST, *Beyond the Limits of Thought*, kap. 11.

nekonečných ordinálů.[39] Nezdá se však být jasné, které takové popisy lze s jistotou považovat za správné a které nikoli.[40]

Snažíme-li se popsat pravidla vztahující se k významu meta-jazykových výrazů, zjišťujeme navíc, že využíváme výrazy, u nichž se předpokládá, že při zacházení s nimi už stejná „pravidla“ aplikujeme. To nás může vést k otázce, zda lze axiomatickou teorii považovat za skutečné vymezení významu *kterýchkoli* logických výrazů. Tak například pravidlo *modus ponens*, zapisované symbolicky např. takto:

$$\varphi, (\varphi \rightarrow \psi) \,/\, \psi,$$

se běžně vyjadřuje větou:

Jestliže jsme odvodili formuli φ a formuli ‘(φ → ψ)’, pak můžeme odvodit formuli ψ.

Při této formulaci pravidla už ovšem využíváme větu typu ‘*Jestliže ..., pak ...*’, v níž se vyskytuje logická konstrukce stejného významu, jaký má spojka ‘→’. Abychom pravidlo správně aplikovali, musíme už obdobné “pravidlo” používat při usuzování na základě tohoto popisu. Proto píše Wittgenstein, že *modus ponens* se nedá vyjádřit větou.[41]

Jiná možnost by byla vyjádřit pravidlo *modus ponens* takto:

Z formulí φ a ‘(φ → ψ)’ lze odvodit formuli ψ.

Zde už se konstrukce ‘*Jestliže ..., pak ...*’ nevyskytuje. Otázka ale je, jestli takovéto přeformulování pravidla není jen hra se slovy: místo predikátu *odvoditelnosti* jsme využili predikát *odvoditelnosti z něčeho*, k němuž se vztahuje odvozovací pravidlo:

Jestliže jsme odvodili větu V a větu ‘Z věty V lze odvodit větu E’, pak můžeme odvodit větu E,

[39] Srv. Steward SHAPIRO, „Incompleteness, Mechanism, and Optimism.“ *The Bulletin of Symbolic Logic*, roč. 4, 1998, č. 3, 1998, s. 284–285.
[40] *Ibid*., s. 288.
[41] Ludwig WITTGENSTEIN, *Tractatus logico-philosophicus*. Praha: OIKOYMENH 2007, věta 6.1264.

vyjádřené zase větou typu ‘*Jestliže ..., pak ...*’.[42]

K něčemu podobnému dochází, charakterizujeme-li logický důsledek sémanticky po vzoru Tarského. Klíčovou roli tu hraje relace splňování při dané interpretaci mimo-logických symbolů, při jejíž definici se předpokládá, že již máme k dispozici odpovídající logické výrazy v neformalizovaném jazyce. Logický důsledek se tak definuje v podstatě překladem logických výrazů symbolického jazyka do neformalizovaného jazyka.[43]

Tato pozorování nás mohou vést k myšlence, že v logice se ve skutečnosti nedosahuje toho, že by význam logického výraziva, a potažmo relace logického důsledku, byly nějak netriviálně charakterizovány jako celek. Čeho se tu dosahuje je, zdá se, to, že jsou odhalovány jednotlivé případy logického důsledku či jednotlivé tautologie: význam logických výrazů a relace logického důsledku jsou prozkoumávány “zevnitř”.

Jestliže je to tak, potom o významu logických výrazů můžeme říci něco podobného jako o významu “empirických” výrazů: Popis pravdivostních podmínek vět, v nichž se tyto výrazy vyskytují, (např.: ‘Věta ‘Sníh je zelený’ je pravdivá právě tehdy, když sníh je zelený’) či “pravidel”, jimiž se používání těchto výrazů řídí (‘Jestliže kolem běží kůň, lze správně tvrdit, že kolem běží kůň.’), se nezdá být skutečnou explikací jejich významu: kdybychom pravdivostní podmínky dané věty či “pravidla” spojená s používáním daného výrazu ještě neznali (či nedokázali rozpoznávat, kdy nastávají či jsou správně aplikována), popis by nám nijak nepomohl. Jestliže tedy význam (logických nebo „empirických“) jazykových výrazů spočívá v pravdivostních podmínkách vět obsahujících tyto výrazy nebo v tom, že používání výrazů se řídí určitými pravidly, pak se zdá, že tyto podmínky či tato pravidla se nedaří popsat: unikají vyjadřovacím možnostem, jež nabízí jazyk, do nějž ony výrazy patří.

[42] Predikát odvoditelnosti ve smyslu zdůvodňování pravdivosti navíc sdílí s predikátem pravdivosti tu vlastnost, že je-li neomezeně aplikován na věty jazyka, do něhož patří, umožňuje dospět ke sporu. V případě, že jazyk, v němž formulujeme odvozovací pravidla, je zároveň jazykem, jehož věty jsou odvozovány, umožňují takto popsaná odvozovací pravidla odvodit spor. Logické výrazivo můžeme vidět jako nástroj, jenž tento problém řeší, tj. umožňuje mluvit o relaci odvoditelnosti vět daného jazyka, případně o vztazích mezi jejich pravdivostními podmínkami, aniž bychom získali spor. Není tu pak ovšem nástroj, jak mluvit o odvoditelnosti (či o pravdivostních podmínkách vět) spočívající ve významu některých z těchto logických výrazů.

[43] Srv. ŠVEJDAR, *Logika*, s. 14–15, 142–3.

Podstatná otázka je, zda má vůbec smysl mluvit např. o *pravidlech*,[44] jež je principiálně nemožné vyjádřit. Přitom můžeme rozlišit přinejmenším dva druhy případů:

- případ, kdy o dostatečně mnoha „tazích v jazykové hře“ můžeme říci, zda daný tah je nebo není v souladu s pravidlem, ale nedaří se popsat samo toto pravidlo, a
- případ, kdy nic jako „tah v jazykové hře“ ani nelze popsat takovým způsobem, aby v připisování správnosti takto popsanému tahu mohl spočívat význam výrazu.

Zdá se, že některá „pravidla“ pro používání „empirických“ nebo logických výrazů spadají (přinejmenším) do druhé kategorie: Jestliže někdo v situaci, kdy kolem běží kůň, pronese větu ‘Kolem běží kůň’, *co je tu tahem*, jemuž připisujeme správnost? Odpovíme-li: ‘Pronést větu ‘Kolem běží kůň’ v situaci, kdy kolem běží kůň’, lze na to říci, že toto je správné skoro *samozřejmě*, nezávisle například na tom, které zvíře je označeno slovem ‘kůň’. Podobně popíšeme-li „tah“ takto: ‘Pronést větu ‘Prší a zároveň svítí slunce’ v situaci, kdy je správné pronést větu ‘Prší’ a zároveň je správné pronést větu ‘Svítí slunce’’, pak tento „tah“ by byl správný i v případě, že bychom výraz ‘*a zároveň*’ chápali jako ‘*nebo*’ či ‘*aniž*’. Zdá se tedy, jako bychom potřebovali *jiný* jazyk k popisu podmínek, za kterých jsou věty pronášeny, má-li v připisování správnosti jednotlivým „tahům v jazykové hře“ spočívat význam výrazu.

Jedna možnost, jak k takovému problému přistoupit, je spatřovat význam těchto výrazů nikoli v jejich vztahu k předmětům či situacím, jež jsou jimi popisovány, nýbrž v jejich vztahu k *smyslovým podnětům*.[45] „Pravidla“ vážící se k významu těchto výrazů by tak mohla mít formu:

> *Ze smyslových podnětů typu T a množiny předpokladů M lze „odvodit“ větu V,*

přičemž význam některých „empirických“ výrazů bychom zřejmě museli při popisu smyslových podnětů považovat za známý. U podobných „pravidel“ lze ovšem očekávat, že budou spadat do první z výše popsaných kategorií: popsat, *které* smyslové podněty a které předpoklady umožňují „odvodit“

[44] Velmi podobně bychom mohli uvažovat v případě, že bychom význam výrazu považovali za určený *pravdivostními podmínkami* vět.

[45] Srv. W. V. O. QUINE, *Word and Object*. Cambridge, MA: MIT Press1960, kap. II.

některou pozorovací větu a které nikoli, se zdá být zcela nedosažitelné (ať už bychom pro popis smyslových podnětů zvolili jakýkoli jazyk neobsahující větu *V*). Důvod není jen v množství podmínek, jež by bylo potřeba do popisu pravidla zahrnout,[46] ale také v tom, že užitečnost pozorovacích vět se zdá být podstatně spojena s jistou neurčitostí ohledně toho, jakým způsobem se tyto věty vztahují k smyslovým podnětům a k jiným větám. Ačkoli obohacení jazyka o takový výraz může snadno vést k pochybnostem o tom, zda podmínky, za kterých lze věty obsahující tento výraz správně pronést, jsou dost jasně určeny na to, abychom daný výraz považovali za vhodný nástroj teoretické práce, může být použití takového výrazu jedinou cestou k rozvinutí teorie umožňující účinně analyzovat některé děje. Podstatnou část další vědecké práce lze pak chápat jako proces, při němž jsou přesněji určována „pravidla" používání daného výrazu.[47] Neurčitost ohledně toho, jaká jsou správná použití výrazu, můžeme navíc vidět jako příčinu „neporovnatelnosti" různých jazyků či pojmových schémat.[48]

Druhořádová teorie aritmetiky

Na matematických axiomech *PA* je něco podivného: je jich nekonečně mnoho. Jestliže axiomy chápeme jako výchozí postuláty dané teorie, pak v pojmu nekonečného množství axiomů je rozpor: nekonečno principů bychom nikdy nevyslovili. Rozpor tu vzniká z toho, že axiomy, jež bychom mohli považovat za skutečné výchozí postuláty aritmetiky, neumožňuje jazyk *PA* vyjádřit. Je totiž mezi nimi axiom indukce, jejž lze vyjádřit takto:

> Jestliže číslo 0 (případně 1) má určitou vlastnost a o každém přirozeném číslu n platí, že má-li tuto vlastnost číslo n, má ji i číslo $n+1$, potom každé přirozené číslo má tuto vlastnost.

Ukazuje se však, že ne pro každou vlastnost čísel princip indukce platí. Uvažme například, po vzoru G. G. Berryho, vlastnost *nebýt větší než všechna čísla, která lze definovat nejvýše 10 slovy*. (S využitím principu indukce je možno dokázat, že všechna přirozená čísla mají tuto vlastnost.) Princip indukce platí jen pro takové vlastnosti, u nichž je jednoznačně určeno,

[46] Srv. W. V. O. QUINE, „Two Dogmas of Empiricism." *The Philosophical Review*, roč. 60, 1951, č. 1, s. 20–43, část V.

[47] Srv. Thomas KUHN, *Struktura vědeckých revolucí*. Praha: OIKOYMENH 2008, s. 40–42, 54–55.

[48] *Ibid*., s. 124–125, 128–131.

která čísla pod ně spadají a která nikoli: pro takové, že existuje množina čísel s touto vlastností. Axiom indukce proto můžeme vyjádřit s pomocí kvantifikace přes množiny:

$$\forall X\, ((0 \in X \wedge \forall x\, (x \in X \rightarrow \mathrm{s}x \in X)) \rightarrow \forall x\, x \in X).$$

To je v podstatě axiom, jejž (využiv práce Richarda Dedekinda) předložil Giuseppe Peano.

Axiom indukce se často zapisuje s využitím druhořádové logiky:

$$\forall P\, ((P0 \wedge \forall x\, (Px \rightarrow P\mathrm{s}x)) \rightarrow \forall x\, Px),$$

přičemž obor proměnné *P* tvoří vlastnosti typu *náležet do množiny X*. Tím ovšem není zodpovězena otázka, jaké množiny existují či které vlastnosti vydělují množinu. (Za částečné řešení tohoto problému bychom mohli považovat axiomatickou teorii množin, jež je výsledkem pokusu postulovat existenci jen takových množin, předpoklad jejichž existence nevede ke sporu, a o níž se neukázalo, že by byla sporná.[49])

Označme teorii, jež vznikne z *PA* nahrazením nekonečně mnoha axiomů indukce druhořádovým axiomem indukce a přidáním axiomů a odvozovacích pravidel některého korektního kalkulu pro druhořádovou logiku, zkratkou '*PA*2'.[50]

Často se má za to, že gödelovská sentence γ_{PA2} příslušná k teorii *PA*2 logicky vyplývá z axiomů teorie *PA*2, přičemž logické vyplývání se tu chápe po vzoru Tarského (viz výše). Úvaha, jíž se k takovému závěru dospívá, bývá přibližně tato:

– Vezměme si množinu *M* obsahující právě ty prvky, které jsou při zvolené interpretaci mimo-logického výraziva označeny některým termem $\underline{n}$. Tato množina obsahuje prvek označený termem '0' a je uzavřená na operaci označenou funktorem 's'.

[49] Viz např.: Ernst ZERMELO, „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.“ *Mathematische Annalen*, roč. 65, 1908, s. 261–263. Srv. také: Thoralf SKOLEM, „Some Remarks on Axiomatized Set Tudory.“ In: VAN HEIJENOORT, J. (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press 1967, s. 299–301.

[50] Pro další úvahy není podstatné, které axiomy a která odvozovací pravidla vážící se k výrazům druhořádové logiky teorie *PA2* obsahuje, mimo to, že z druhořádového axiomu indukce lze v *PA2* odvodit všechny prvořádové axiomy indukce teorie *PA*.

- Jestliže je při dané interpretaci pravdivý axiom indukce, pak každá podmnožina oboru jmenných proměnných, která obsahuje prvek označený termem ‘0’ a je uzavřená na operaci označenou funktorem ‘s’, obsahuje všechny prvky oboru jmenných proměnných.[51]
- Pro každý model teorie *PA*2 tedy platí, že všechny prvky oboru jmenných proměnných jsou označeny některým termem $\underline{n}$.
- Díky tomu, že všechny aritmetické sentence dokazatelné v teorii *PA*2 jsou pravdivé, je pravdivá i sentence γ_{PA2} (to lze zdůvodnit stejně, jako jsme to provedli výše v případě prvořádové Peanovy aritmetiky).
- Sentence γ_{PA2} je tvaru ‘$\forall x\varphi(x)$’ a stejně jako v případě prvořádové *PA* lze dokázat, že pro každé přirozené číslo n platí: jestliže formule $\varphi(\underline{n})$ je pravdivá, pak tato formule logicky vyplývá z axiomů teorie *PA*2, a tedy je pravdivá v každém modelu teorie *PA*2.
- Protože formule γ_{PA2} je pravdivá, je pravdivá i každá formule $\varphi(\underline{n})$, a ka žďá formule $\varphi(\underline{n})$ je tedy pravdivá v každém modelu teorie *PA*2. Protože o každém modelu teorie *PA*2 platí, že všechny prvky oboru proměnné x jsou označeny některým termem $\underline{n}$, je v každém modelu teorie *PA*2 pravdivá sentence γ_{PA2}.
- Sentence γ_{PA2} tedy logicky vyplývá z axiomů teorie *PA*2.

Obraťme pozornost k druhému bodu této úvahy. Zde se podstatně využilo toho, že do oboru predikátových proměnných patří *všechny* podmnožiny oboru jmenných proměnných. Za součást interpretace mimo-logického výraziva se tedy nepovažuje stanovení oboru predikátových proměnných: jakmile je stanoven obor jmenných proměnných, obor predikátových proměnných se již považuje za určený. Jako obor jmenných proměnných je přitom naopak zvykem připouštět libovolnou množinu, přičemž má-li daná interpretace být *modelem* určité množiny axiomů, mohou být některé obory proměnných vyloučeny těmito axiomy. Kdybychom i obor predikátových proměnných považovali za něco, co lze interpretovat libovolně (v souladu s axiomy, jež mají být při dané interpretaci pravdivé), výsledkem by bylo, že gödelovská sentence γ_{PA2} z axiomů teorie *PA*2 logicky nevyplývá.[52]

Dá se tedy říci, že rozdíl mezi logickým vyplýváním a odvoditelností vyvstává v případě, že pojem množiny považujeme za *logický* pojem, při-

[51] Tento bod bude ještě vyjasněn níže.
[52] Viz Leon HENKIN, „Completness in the Theory of Types.“ *Journal of Symbolic Logic*, roč. 15, 1950, s. 81–91.

čemž jeho význam je určen nějak jinak než souborem axiomů či odvozovacích pravidel. Konkrétněji je třeba chápat pojem množiny tak, že při popisu množin lze využít meta-jazykové výrazy popisující odvození v teorii *PA*2. V takovém případě můžeme říci, že Gödelova věta o neúplnosti odhaluje nedostatečnost logických deduktivních systémů (či kalkulů), pokud jde o to popsat relaci logického důsledku.

Často se navíc považuje za prokázané, že *PA*2 je *sémanticky úplná*, tj. že o každé aritmetické sentenci φ platí: buď z *PA*2 logicky vyplývá φ, nebo '¬φ'.[53] Důvod je prostý. Druhořádový axiom indukce zaručuje, že přirozená čísla nejsou nic jiného než prvky označené (při dané interpretaci) symbolem '0' a prvky, jež z něj lze získat postupnou aplikací operace označené (při dané interpretaci) symbolem 's'.[54] Označme tuto množinu *A*. Dá se snadno ověřit, že axiomy vztahující se k operacím *sčítání* a *násobení* určují tyto operace na množině *A* jednoznačně. V důsledku toho se žádné dva modely teorie *PA*2 (tj. žádné dvě interpretace splňující všechny axiomy *PA*2) nemohou podstatně lišit a všechny sentence mají při všech interpretacích stejnou pravdivostní hodnotu. Tato pravdivostní hodnota tedy musí být stejná jako při standardní interpretaci jazyka *PA*2, tj. ve struktuře přirozených čísel.

Dokazatelnost a pravdivost v matematice

Gödelovy výsledky týkající se neúplnosti axiomatických teorií aritmetiky vedly k zásadní proměně obecně přijímaného názoru na to, jaká je povaha matematického dokazování a matematické pravdivosti. Zatímco před rokem 1931 se zdálo, jako by pravdivost matematického tvrzení spočívala v jeho odvoditelnosti z určité množiny axiomů podle explicitně popsatelných pravidel a matematické dokazování bylo v podstatě odvozováním podle těchto pravidel, po Gödelových objevech se pravdivost a dokazování v matematice jeví jako něco, co lze s pomocí axiomatických teorií vystihnout jen částečně. Zdá se, jako by povaha významu, pravdivosti a dokazování matematických vět byla obestřena záhadou. Dochází k důslednému rozlišování mezi „formální" a „neformální" matematikou (např. mezi „matematickými" a „metamatematickými" přirozenými čísly, mezi formálními a neformálními

[53] Podmínkou přitom je, aby pojem *interpretace* mimo-logického výraziva byl chápán tak, že obor predikátových proměnných tvoří při každé interpretaci soubor všech podmnožin oboru jmenných proměnných.
[54] Srv. Jaroslav PEREGRIN, „Logic and 'Nothing Else'." In: PELIŠ, M. (ed.), *Logica Yearbook 2007*. Praha: Filosofia 2008, s. 111–118.

důkazy[55]), aniž by se zdálo být jasné, v čem přesně spočívá rozdíl. Výsledky zkoumání axiomatických teorií v logice běžně nejsou aplikovány na „neformalizované" matematické teorie, protože ty se považují za podstatně odlišné od axiomatických teorií.

Stojí však za povšimnutí, že neformální matematické důkazy se zpravidla daří provádět i v předem popsaných axiomatických teoriích. V axiomatické teorii *ZFC* lze pravděpodobně provést všechny dosud známé důkazy vět aritmetiky, s výjimkou důkazu gödelovské sentence příslušné k *ZFC* a některých vět, jež z ní umíme vyvodit (přičemž gödelovských sentencí příslušných k teorii *ZFC* lze sestrojovat neomezeně mnoho). Navíc, abychom dokázali gödelovskou sentenci příslušnou k *ZFC*, museli bychom buď vycházet z toho, že všechny axiomy *ZFC* jsou pravdivé *v tomtéž smyslu*, v jakém jsou pravdivé věty aritmetiky a v jakém jsou pravdivá tvrzení o dokazatelnosti v axiomatických teoriích, a provést důkaz podobný důkazu naznačenému výše v bodech 1.–6. s využitím predikátu pravdivosti, anebo využít některou silnější teorii množin (například teorii Kelley-Morseovu[56]), čímž by se problém přesunul od *ZFC* k této teorii. Přitom se zdá, že o pravdivosti některých axiomů teorie množin lze pochybovat mnohem spíše než o pravdivosti axiomů aritmetiky a k „důkazu" gödelovské sentence příslušné k takové teorii lze mít výhrady.

Tato pozorování nás mohou vést k otázce, zda neformální teorii aritmetiky přirozených čísel nelze považovat za teorii, jež je dobře popsána některým souborem axiomů a odvozovacích pravidel. Kdyby tomu tak bylo, potom by (vzhledem k tomu, že axiomatické teorie jsou neúplné v tom smyslu, že některé aritmetické sentence tu nejsou ani dokazatelné, ani vyvratitelné) bylo třeba připustit, že pravdivostní hodnotu některých vět jazyka aritmetiky nelze matematickými prostředky zjistit, a tedy že některé problémy aritmetiky nejsou matematicky řešitelné – lze-li vůbec něco, co řešit nelze, nazývat problémem. Výše jsme však naznačili, jak lze zdůvodnit pravdivost gödelovské sentence (jakožto věty aritmetiky) příslušné k libovolné axiomatické teorii, o níž víme, že její axiomy jsou pravdivé a odvozovací pravidla zachovávají pravdivost. Kdyby tedy některá axiomatická teorie měla vystihovat dokazatelnost v aritmetice *vyčerpávajícím* způsobem, musela by obsahovat axiomy nebo odvozovací pravidla, jejichž správnost není očividná. Přitom správností axiomů a odvozovacích pravidel se tu myslí přesně toto: je-li některá sentence jazyka aritmetiky ekvivalentní s tvrzením o dokazatelnosti v některé axiomatické teorii a je-li tato sentence

[55] Srv. SOCHOR, *Metamatematika teorií množin*, s. 36–37.
[56] Viz např. SOCHOR, *Metamatematika teorií množin*, s. 19, 27.

je dokazatelná v dané axiomatické teorii, pak je ono tvrzení o dokazatelnosti pravdivé.

Zdá se, že používání meta-jazykových výrazů při důkazu gödelovských sentencí příslušných k takovým teoriím aritmetiky, o jejichž správnosti není pochyb, (např. *PA*, či *ZFC*) může být nahrazeno matematickými prostředky (např. využitím nekonečných množin či vlastních tříd), jež poskytuje některá silnější axiomatická teorie (např. *ZFC*, či Kelley-Morseova teorie množin) – ovšem za cenu toho, že o správnosti těchto teorií lze pochybovat. Přijmeme-li prostředky, jež některá taková teorie nabízí, za přípustné nástroje v matematických důkazech, potom gödelovskou formuli příslušnou k takové teorii nelze považovat za dokazatelnou výše naznačeným „univerzálním" postupem. Jestliže věty dokazatelné v takové teorii můžeme (s matematickou jistotou) prohlásit za správné, jde o správnost v jiném smyslu, než v jakém jsou správné pravdivé věty o dokazatelnosti v axiomatických teoriích.

Na základě předchozích úvah můžeme říci, že ať dokazatelnost v matematice chápeme jako prokazování pravdivosti, či jako aplikaci předem přijatých pravidel (což se dnes zdá být vcelku běžné), není vyloučeno, že všechny matematicky dokazatelné věty jsou dokazatelné v některé korektní axiomatické teorii – a tedy že množina všech matematicky dokazatelných vět aritmetiky je částí *algoritmicky generované* množiny pravdivých sentencí.[57]

Dosud jsme se zabývali hypotézou, že dokazatelnost v aritmetice je vymezena s pomocí některé axiomatické teorie, aniž bychom řekli něco o tom, v čem spočívá *pravdivost* vět aritmetiky. Zdá se však, že nehledě na Gödelovy výsledky jsou dobré důvody pro to považovat aritmetickou pravdivost za vymezenou s pomocí souboru axiomů či pravidel. Slovy Grahama Priesta:

> We appear to obtain our grasp of arithmetic by learning a set of basic and effective procedures for counting, adding, etc.; in other words, by knowledge encoded in a decidable set of axioms. If this is right, then arithmetic truth would seem to be just what is determined by these procedures. It must therefore be axiomatic. If it is not, the situation is very puzzling. The only real alternative

[57] Viz např.: Haim GAIFMAN, „What Gödel's Incompleteness Result Does and Does Not Show." *Journal of Philosophy*, roč. 4, 2000, č. 3, s. 466–488.

seems to be Platonism, together with the possession of some kind of sixth sense, "mathematical intuition".[58]

Co by se dalo na základě Gödelových výsledků soudit, kdybychom aritmetickou pravdu považovali za určenou axiomy a odvozovacími pravidly některé axiomatické teorie? Vyjasněme nejprve, co se tu myslí oním *určováním*. Výše jsme ukázali, že o teorii *PA*2 lze (při určitém způsobu definování logických výrazů jazyka *PA*2) soudit, že pro každou sentenci φ jazyka aritmetiky platí: buď z matematických axiomů *PA*2 logicky vyplývá sentence φ, nebo sentence '¬φ'. Axiomy teorie *PA*2 tedy v tomto smyslu vymezují množinu pravdivých a množinu nepravdivých aritmetických sentencí tak, že každá aritmetická sentence patří do jedné z těchto množin. Takovéto vymezení ovšem předpokládá, že aritmetická pravdivost je již nějak určena v jazyce, v němž definujeme význam logických výrazů jazyka *PA*2:[59] dospíváme-li k závěru, že o každé aritmetické sentenci je takto buď určeno, že je pravdivá, nebo je takto určeno, že je nepravdivá, soudíme tak na základě toho, že v každém modelu *PA*2 platí tytéž aritmetické sentence, jež platí ve struktuře přirozených čísel (podle Tarského definice splňování). Dá se říci, že teorie *PA*2 takto určuje aritmetickou pravdu v tomtéž smyslu, v jakém ji určuje např. odvozovací pravidlo:

Jestliže formule φ platí podle Tarského definice splňování ve struktuře přirozených čísel, pak lze odvodit formuli φ.

Tarského definice ovšem vymezuje množinu pravdivých sentencí jazyka aritmetiky jen za předpokladu, že pravdivostní hodnoty vět aritmetiky jsou již určeny. Jestliže tedy axiomatickou teorii máme chápat jako *definici* aritmetické pravdy, je třeba chápat způsob, jakým axiomatická teorie vymezuje množinu pravdivých a množinu nepravdivých sentencí, jinak – konkrétně tak, aby při využití této definice ke zjišťování, zda některá daná sentence je pravdivá, nebylo třeba už vědět (odjinud), co to znamená, že daná sentence

[58] Graham PRIEST, „Is Arithmetic Consistent?" *Mind*, roč. 103, 1994, č. 411, s. 343.

[59] Poznamenejme, že něco podobného lze říci o axiomatické teorii vzniknuvší obohacením prvořádové PA o tzv. ω-pravidlo. I o této teorii lze soudit, že vymezuje množinu pravdivých aritmetických sentencí tak, že pro každou sentenci φ jazyka aritmetiky platí: buď formule φ, nebo formule '¬φ' je prvkem této množiny. Přitom je však třeba počítat s tím, že je již určena pravdivost vět o dokazatelnosti v axiomatických teoriích, v nichž některá pravidla mají nekonečně mnoho premis. Srv. např.: Vojtěch KOLMAN, „Gödel's Theorems and the Synthetic/Analytic Distinction." In: KOLMAN, V. (ed.), *From Truth to Proof*. Praha: UK FF 2007, s. 55.

či jiná věta se stejným významem je pravdivá. Pokud tedy např. teorii *PA*2 považujeme za definici aritmetické pravdy, nelze výše provedenou úvahu vedoucí k závěru, že teorie *PA*2 je úplná, považovat za správné zdůvodnění toho, že každá sentence jazyka aritmetiky je buď pravdivá, nebo nepravdivá.

Další možnost, jak chápat to, že nějaká axiomatická teorie *T* určuje aritmetickou pravdu, je tato: aritmetická sentence je pravdivá, jestliže lze z axiomů teorie *T* správně vyvodit tuto sentenci. Přitom je však podstatné, abychom při tomto vyvozování nevyužívali znalosti aritmetiky. Jedna možnost, jak tento požadavek specifikovat, je říci, že při usuzování lze využít jen znalosti logiky. Skutečnost, že teorie *T* určuje aritmetickou pravdu, pak můžeme vyjádřit takto:

> *Aritmetická sentence φ je pravdivá, jestliže z axiomů teorie T lze logicky správným úsudkem dospět k sentenci φ.*

V tomto případě se odvozovací pravidla teorie *T* stávají z hlediska toho, jak teorie *T* určuje aritmetickou pravdivost, zbytečnými, pokud lze aplikaci každého z nich nahradit jedním nebo několika logicky správnými kroky (a totéž platí o případných logických axiomech, jestliže ke každému z nich lze dospět logicky správnou úvahou).

Co můžeme při tomto pojetí aritmetické pravdy soudit na základě Gödelových vět o neúplnosti? Jestliže teorie *T* určující takto aritmetickou pravdivost obsahuje matematické axiomy *PA* a princip indukce aplikovatelný na věty o dokazatelnosti v dané teorii (jak je tomu např. u výše popsané teorie *M* a v případě, že druhořádovou kvantifikaci chápeme určitým způsobem, i u teorie *PA*2) a jsme-li ochotní používat při logickém usuzování predikát *pravdivosti*, pak je matematika neaxiomatizovatelná v tomto smyslu: jestliže pro danou axiomatickou teorii *U* můžeme logicky správnou úvahou vycházející z axiomů teorie *T* (jež určuje aritmetickou pravdivost) soudit, že všechny formule dokazatelné v teorii *U* jsou pravdivé, pak gödelovská sentence příslušná k teorii *U* je pravdivá.[60]

[60] Poznamenejme, že i v případě, že bychom při usuzování z axiomů neumožnili využívat predikát pravdivosti, může být značně netriviální otázka, které úsudky jsou logicky správné a které nikoli. Například: Co lze využít při zjišťování logických důsledků axiomů PA2 – co všechno lze předpokládat o vlastnostech či množinách, přes něž se kvantifikuje v axiomu indukce? Lze například Goodsteinovu větu považovat za logický důsledek axiomů PA2? Či lze předpokládat vše, co tvrdí ZFC, a tedy soudit, že gödelovská formule příslušná k ZFC je v právě zkoumaném smyslu pravdivá? (Vzhledem k spojitosti mezi pojmem pravdivosti a pojmem množiny však toto nemusí být nijak překvapivé.)

Jiná možnost, jak rozumět tomu, že některá axiomatická teorie T vymezuje pravdivost vět aritmetiky, je považovat za pravdivé ty aritmetické sentence, jež jsou v teorii T dokazatelné – tedy odvoditelné pomocí odvozovacích pravidel z axiomů této teorie. To je jistě možnost, již měl na mysli autor předchozího citátu.

V takovém případě bychom mohli úvahou naznačenou výše v bodech 1.–6. dospět k výsledku, že gödelovská sentence γ_T je pravdivá. Tím ovšem získáváme spor, neboť sentence γ_T jakožto formule nedokazatelná v teorii T nemůže být pravdivá. Zdůvodnění, jejž jsme výše považovali za důkaz gödelovské sentence, bychom nyní museli považovat za *reductio ad absurdum* vyvracející některý z předpokladů, jež byly při tomto zdůvodnění využity. Které to jsou?

Jedním z nich byl předpoklad, že při dokazování vět aritmetiky lze využít predikát pravdivosti (či predikát dokazatelnosti ve smyslu předvádění pravdivosti), aniž bychom předem specifikovali, která jeho použití připadají v úvahu a která nikoli. Dalším byl předpoklad, že věty o odvoditelnosti v axiomatické teorii T lze považovat za věty téhož druhu jako věty aritmetiky – konkrétně že princip indukce lze aplikovat na vlastnosti vyjádřené s pomocí meta-jazykových výrazů popisujících důkazy ve formálních teoriích. V tomto duchu píše Ludwig Wittgenstein:

> I imagine someone asking my advice; he says: "I have constructed a proposition (I will use 'P' to designate it) in Russell's symbolism, and by means of certain definitions and transformations it can be so interpreted that it says: 'P is not provable in Russell's system.' Must I not say that this proposition on the one hand is true, and on the other hand is unprovable? For suppose it were false; then it is true that it is provable. And that surely cannot be! And if it is proved, then it is proved that it is not provable. Thus it can only be true, but unprovable."
>
> Just as we ask, "'Provable' in what system?," so we must also ask, "'True' in what system?" "True in Russell's system" means, as was said, proved in Russell's system, and "false in Russell's system" means the opposite has been proved in Russell's system. – Now what does your "suppose it is false" mean? In the Russell sense it means, "suppose the opposite is proved in Russell's system"; if that is your assumption you will now presumably give up the interpretation that it is unprovable. And by "this interpretation" I understand the translation into this English sentence. – If you assume that the proposition is provable in Russell's system, that means it is true in the Russell sense, and the interpretation "P is not provable" again has to be given up. If you assume that the proposition

> is true in the Russell sense, the same thing follows. Further: if the proposition is supposed to be false in some other than the Russell sense, then it does not contradict this for it to be proved in Russell's system. (What is called "losing" in chess may constitute winning in another game.)[61]

Ztotožníme-li tedy aritmetickou pravdivost s dokazatelností v axiomatické teorii, může nás to vést k tomu, abychom se na základě Gödelových vět vzdali přesvědčení, že všechny úvahy o dokazatelnosti v axiomatických teoriích lze považovat za součást matematiky, případně abychom matematiku přestali považovat za teorii o vypisování řad znaků v souladu s určitými pravidly.

Takový závěr se však při právě zkoumaném pojetí aritmetické pravdy nemusí zdát překvapivý. Věty aritmetiky nyní chápeme jako pravdivé díky souboru *axiomů* (a případně odvozovacích pravidel), avšak věty o důkazech v dané axiomatické teorii musejí být pravdivé *nezávisle* na těchto axiomech: axiomatická teorie byla popisována *předtím*, než byla s její pomocí vymezena aritmetická pravdivost. Z toho lze soudit, že věty aritmetiky jsou pravdivé v jiném smyslu než věty o důkazech v axiomatických teoriích.

Která logika je správná?

Připadá v úvahu ještě jiná možnost, jak naposled zkoumané pojetí aritmetické pravdy sloučit s Gödelovými větami. K takové možnosti nás může přivést následující úvaha:¨

> *Předpokládejme, že matematické dokazování je ve skutečnosti dokazováním v axiomatické teorii T. Kdyby gödelovská sentence γ_T byla matematicky dokazatelná, byla by pravdivá, a tedy (vzhledem k tomu, co „tvrdí“) by nebyla dokazatelná. Tudíž sentence γ_T není dokazatelná. Tím jsme ji ale dokázali!*

Standardní postup by nyní byl opustit předpoklad, že matematické dokazování (obnášejí-li aplikaci predikátu pravdivosti a predikátu dokazatelnosti) je dokazováním v axiomatické teorii *T*. Jiná možnost je připustit, že axiomatická teorie, jež vystihuje matematické dokazování, je ve skutečnosti sporná. V tomto duchu píše Wittgenstein:

[61] Ludwig WITTGENSTEIN, *Remarks on the Foundations of Mathematics*. G. H. VON WRIGHT, R. RHEES, G. E. M. ANSCOMBE (eds.). Překl. G. E. M. ANSCOMBE. Cambridge, MA: MIT 1978, I, Appendix III, §8.

> Let us suppose I prove the unprovability (in Russell's system) of P; then by this proof I have proved P. Now if this proof were one in Russell's system – I should in that case have proved at once that it belonged and did not belong to Russell's system. – That is what comes of making up such sentences. – But there is a contradiction here! – Well, then there is a contradiction here. Does it do any harm here?[62]

Graham Priest dokonce zastává názor, že Gödelovy výsledky *si žádají*, abychom matematiku prohlásili za spornou:

> A stronger form of the first Theorem is to the effect that for any axiomatic arithmetic of a certain kind, we can actually produce a statement of arithmetic (the Gödel sentence) that is not provable in the theory, yet which we can prove to be true. [...] [T]he only reasonable conclusion that can be drawn from this form of the Theorem is that our proof procedures are inconsistent.[63]

Přitom kdybychom přijali spor v matematice, bylo by třeba vzdát se některých standardních logických postupů, neboť s pomocí nich lze v matematice dokázat cokoli.

Jeden důsledek předchozí úvahy však můžeme shledávat velmi podivným: ke sporu jsme dospěli díky tomu, že věty aritmetiky považujeme zároveň za věty o dokazatelnosti v axiomatických teoriích, a že věty dokazatelné v axiomatické teorii, o níž se jedná, považujeme za pravdivé. Jestliže je gödelovská sentence příslušná k dané teorii dokazatelná v této teorii, pak je pravdivá, a tedy tu zároveň *není* dokazatelná. Jinak řečeno, *důkaz* gödelovské sentence v dané teorii by nás nesměl přimět k tomu přestat tvrdit, že daná sentence není v dané teorii dokazatelná.

K pochybnostem o tom, zda postupy klasické logiky jsou správné, nás může přivést už slabší předpoklad než ten, že aritmetickou pravdivost lze chápat jako dokazatelnost v určité axiomatické teorii, jejíž axiomy a odvozovací pravidla shledáváme správnými. Vycházíme-li z hypotézy, že aritmetická pravda je definována některým souborem axiomů (např. matematických axiomů *PA2*) jazyka takové logické formy, že se nedaří explicitně popsat, které logické úsudky lze na základě těchto axiomů provádět a které nikoli, můžeme rozumně pochybovat o tom, zda je takto o každé aritmetické

[62] WITTGENSTEIN, *Remarks on the Foundations of Mathematics*, I, Appendix III, §11.
[63] PRIEST, „Is Arithmetic Consistent?“ s. 344. Srv. též Graham PRIEST, *In Contradiction*. Oxford: Oxford University Press 2006, kapitola 3.

sentenci rozhodnuto, že je pravdivá, nebo že je nepravdivá (viz výše).[64] Jako adekvátní logické postupy se pak mohou jevit např. ty, jež nabízí intuicionistická logika, spíše než postupy klasické logiky.

Závěr

Jestliže se z vět o neúplnosti soudí, že *relace logického důsledku* není relací odvoditelnosti v logickém kalkulu, je to díky tomu, že se větám připisuje taková logická forma, že mezi *logickými výrazy* jsou buď meta-jazykové výrazy, s pomocí nichž lze vyjádřit tvrzení o dokazatelnosti v axiomatických teoriích, anebo výrazy, u nichž je podstatné, že jsou součástí jazyka obsahujícího výrazy předchozího druhu. Navíc je třeba používat při zkoumání relace logického důsledku predikát pravdivosti (což je v případě, že relaci logického důsledku chápeme jako relaci *logického vyplývání*, samozřejmé; relaci logického vyplývání ovšem nelze definovat pro jazyk, v němž je tato relace definována, aniž by z definice bylo možné odvodit spor).

Jsme-li připraveni aplikovat princip indukce pro přirozená čísla na věty o odvoditelnosti v axiomatických teoriích a využívat v matematických důkazech predikát pravdivosti (aniž bychom předem určili, které jeho aplikace připadají v úvahu a které nikoli), můžeme tvrdit, že aritmetika není axiomatizovatelná. Tím se však nemyslí, že by neexistovala taková axiomatická teorie, v níž by byly dokazatelné všechny věty aritmetiky, jež je možné (neformálně) matematicky dokázat. Dokonce se tím nemyslí ani to, že neexistuje axiomatická teorie, v níž by byly dokazatelné právě všechny neformálně dokazatelné věty aritmetiky. Myslí se tím jen to, že všechny matematické důkazy nelze chápat jako odvození v jediné takové teorii: že některé axiomy nebo odvozovací pravidla dané teorie by nebyly *evidentně* správné. Slovy Kurta Gödela:

> [The second incompleteness theorem] makes it impossible that someone should set up a certain well-defined system of axioms and rules and consistently make the following assertion about it: All of these axioms and rules I perceive (with mathematical certitude) to be correct, and moreover I believe that they contain all of mathematics.[65]

[64] Připadá například v úvahu, že by množina všech pravdivých sentencí aritmetiky byla algoritmicky generovatelná. (Srv. ŠVEJDAR, *Logika*, s. 317.)

[65] Kurt GÖDEL, „Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications.“ In: S. FEFERMAN (ed.), *Collected Works*. Volume III: Unpublished Essays and Lectures. Oxford: Oxford University Press 1995, s. 309.

(Gödel tu sice mluví o druhé větě o neúplnosti, avšak totéž lze ze zcela stejných důvodů říci o první větě o neúplnosti.)

Úspěchy při formalizaci matematických důkazů v kterékoli oblasti matematiky však naznačují, že matematiku lze považovat za axiomatizovanou přinejmenším z velmi velké části. Důvody myslet si, že tomu tak není zcela, jsou pravděpodobně dva. Jedním je přesvědčení, že každou aritmetickou sentenci určitého druhu[66] lze dokázat, nebo vyvrátit (a nikoli oboje), z čehož pak lze usoudit, že dokazatelné věty aritmetiky není možné algoritmicky generovat. Nevím o tom, že by toto přesvědčení mělo rozumné opodstatnění.

Druhý důvod myslet si, že matematiku nelze zcela axiomatizovat, lze vidět v tom, že umíme dokázat gödelovské sentence příslušné k axiomatickým teoriím, jejichž axiomy a odvozovací pravidla shledáváme správnými, využíváme-li přitom predikát pravdivosti a aplikujeme-li aritmetiku jako teorii o dokazatelnosti v těchto teoriích. V souladu s tím je možné domnívat se, že množina všech dokazatelných vět aritmetiky je algoritmicky generovatelná, přičemž vycházíme-li z toho, jak se daří formalizovat matematické důkazy, jeví se tato hypotéza poměrně pravděpodobnou. Také se lze domnívat, že množina pravdivých vět aritmetiky je vymezena s pomocí některých axiomů (např. axiomů *PA*2), přičemž jejich důsledky tvoří algoritmicky generovatelnou množinu – a tedy že o některých sentencích jazyka aritmetiky neplatí, že jsou buď pravdivé, nebo nepravdivé. Díky tomu vyvstává otázka, zda lze postupy klasické logiky (vycházející z toho, že každá věta je buď pravdivá, anebo nepravdivá) považovat ve všech případech za rozumné, či zda je klasická logika výsledkem přílišného zobecnění postupů, jež jsou v aritmetice rozumně aplikovatelné jen v některých případech.

Soudíme-li navíc, že axiomům či odvozovacím pravidlům, jež lze využít v matematických důkazech, nelze připisovat pravdivost v tom smyslu, v jakém jsou pravdivé věty o dokazatelnosti v axiomatických teoriích, pak můžeme zároveň soudit, že matematickému dokazování pravděpodobně velmi dobře odpovídá odvozování formulí v některé axiomatické teorii, jejíž axiomy i odvozovací pravidla shledáváme správnými. Chápeme-li přitom aritmetickou pravdu jako dokazatelnost v takové axiomatické teorii, pak je třeba přestat považovat gödelovskou sentenci příslušnou k této teorii za výrok v běžném slova smyslu – tj. přestat soudit, že je buď pravdivá, nebo nepravdivá.

[66] Jde o tzv. Π1-sentence. Viz ŠVEJDAR, *Logika*, s. 309.